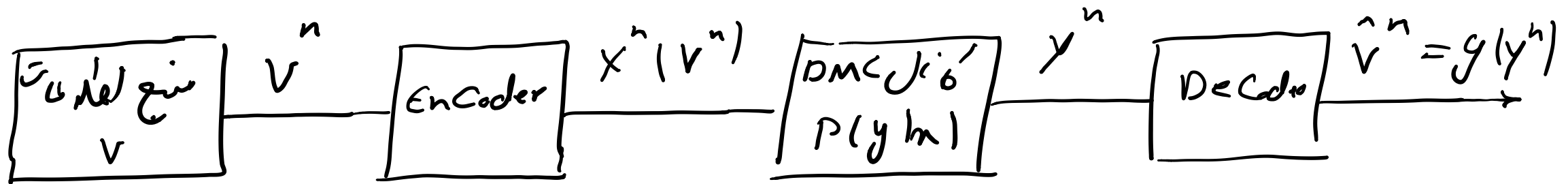


جداسازی کانال دمنبع

فرهنگ می‌کنیم که منبع n کانال‌های از یکدیگر انبساطی محدود V تولید می‌کند. هر آن دسته‌ای تولید شده، شرایط AEP را برقرار می‌کند. هدف ارسال دیتا به $V' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ورودی کانال ارسال کنیم به طوری که گیرنده بتواند با خطای به میزان دلخواه کم، سیگنال ارسال را آشکار سازی کند.

بدون دیاگرام زیر می‌تواند نشان دهنده ساختار این سیستم باشد.



از دید آمار برای که کردن دنباله های اقله عات استاده می شود $\{x^n(v^n)\}$ اقله عات ردی فایده
 ارسال می شود و گیرنده با دریافت y^n بر اساس قانون دیکریت g ، تخمین در مورد دنباله
 ارسال به صورت $\hat{v}^n$ خواهد داشت. احتمال خطا به صورت زیر قابل بیان است ،

$$P_r \{v^n \neq \hat{v}^n\} = \sum_{v^n} \sum_{y^n} P(v^n) P(y^n | x^n(v^n)) \underbrace{I(g(y^n) \neq v^n)}_{\text{تابع Indicator}}$$

قضیه کدینگ ترام کانال دمنوع

اگر فرکانس تعدادی $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ از الفبای گدرد $\mathcal{V}$ انتخاب شوند و شرایط AEP

را برقرار کنند و داشته باشیم $H(\mathcal{V}) < C$ آنگاه سی تران اطلاعات منوع را با خطای به میزان
دلتا کم $\rightarrow 0$ $\{ \hat{\mathcal{V}}^n \neq \mathcal{V}^n \mid P_r \}$ روی کانال ارسال کنیم. عکس آن برای سی تران

است. ن داشته باشیم $H(\mathcal{V}) > C$ آنگاه ارسال با خطای زیاری همراه خواهد بود.
(ارسال با خطای به میزان دلتا کم وجود ندارد)

بدین ترتیب ترام کانال دمنوع وجود دارد
برای آن داریم $\rightarrow 0$ $\{ \hat{\mathcal{V}}^n \neq \mathcal{V}^n \mid P_r \}$

اثبات: تابع دسترس بودن

برای ثابت تابع دسترس بودن از آنکه یک در مرحله ای استفاده می کنیم (که یک منبع و کانال به صورت
مخزای) خواهیم دید که با استفاده از این روش نیز به همان حد یک تمام کانال و منبع می رسم.
چون فرض کردیم که $\forall$ $A \in P$ برآورده می شود، یک مجموعه نرعی $A_e^{(n)}$
وجود دارد که دارای تعداد اعضای کم و احتمال زیاد است. از بین دنباله های منبع فقط همین
دنباله ها که کرده دردی کانال ارسال می کنیم. بقیه دنباله ها را با یکاد خطا می کنند که باینر
بعضی $A \in P$ این مقدار خطا به ازای n به اندازه کافی بزرگ است، کم می شود.
از طرف دیگر اعضای مجموعه نرعی A توان با تعداد $n(H + \epsilon)$ بیت که کرد از طرف دیگر با نرم به

مقصود که بکنند کانال آفسر $\epsilon < H + \epsilon = \frac{\log M}{n}$ نرخ که باشد یک که کانال با خطای ϵ

میزان دلتا کم وجود دارد که می توان بیان ارسال را انجام داد.

خطای که بکنند در هر مرحله ای ضریب صورت زیر قابل بیان است

$$Pr \{V^n \neq \hat{V}^n\} \leq Pr \{V^n \notin A_\epsilon^n\} + Pr \{g(V^n) \neq V^n \mid V^n \in A_\epsilon^n\}$$

$$Pr \{V^n \neq \hat{V}^n\} = Pr \left\{ \begin{array}{l} \text{خطای دلتا می دانسته باشیم} \\ \text{یعنی نوعی باشد در خطا} \\ \text{نرخ بدست} \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{سگنال اشتباه سازی شده} \\ \text{ندعی باشد} \end{array} \right\}$$

$$\leq \epsilon + \epsilon \Rightarrow Pr \{V^n \neq \hat{V}^n\} \leq 2\epsilon$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 با نرم به مقصود که بکنند کانال ϵ با نرم به مقصود ϵ

بنابرین برای n به اندازه کافی بزرگ، اگر $C < H(v)$ باشد، پس ترانسمی اطلاعات را با خطای به میزان دلخواه کم روی کانال ارسال کنیم.
 = در واقع، و بدین که باید مناسب در حلهای راستان داریم که به ضرری که باید توانم کاری کند.

اثبات علی مقصد: اکنون انتقال با خطای به میزان دلخواه کم $\rightarrow \{v \neq v', P_r\}$ ، لازم می آید که شرط $C < H(v)$ برای منبع برقرار باشد.

برای هر که باید توانم کانال را منبع

تخصیص
 یعنی که باید منبع تأثیری روی شرط باشد $(C < H(v))$ ندارد. سئو انتخاب اندیس ها به صورت گزینش تأثیری در شرط $C < H(v)$ ندارد.

تابع کدینگ به صورت $\chi^n(v^n)$ است داریم

$$\chi^n: v^n \rightarrow \chi^n$$

تابع دکدینگ به صورت $g(\gamma^n)$ است داریم

$$g: \gamma^n \rightarrow v^n$$

$$g(\gamma^n) = \hat{v}^n \in v^n$$

باینده به نام ساری فائز داریم ،

$$H(v^n | \hat{v}^n) \leq 1 + P_r \{v^n \neq \hat{v}^n\} \log |v^n|$$

$$\Rightarrow H(v^n | \hat{v}^n) \leq 1 + n P_r \{v^n \neq \hat{v}^n\} \log |v|$$

از طرف دیگر باینده به تعریف نرخ آنتروپی داریم ،

$$H(v) \leq \frac{1}{n} H(v_1, v_2, \dots, v_n) = \frac{1}{n} H(v^n)$$

$$H(v^n) = H(v^n | \hat{v}^n) + I(v^n; \hat{v}^n)$$

همچنین داریم .

$$\Rightarrow H(v) \leq \frac{1}{n} H(v^n | \hat{v}^n) + \frac{1}{n} I(v^n; \hat{v}^n)$$

$$\leq \frac{1}{n} (1 + n P_r \{v^n \neq \hat{v}^n\} \log |v| + \frac{1}{n} I(v^n; \hat{v}^n))$$

↑
نا سبب ری فائز

$$\leq \frac{1}{n} + P_r \{v^n \neq \hat{v}^n\} \log |v| + \frac{1}{n} I(x^n; y^n)$$

$$\uparrow \text{منه برایش داده ها} : v^n \rightarrow x^n(v^n) \rightarrow y^n \rightarrow g(y^n) = \hat{v}^n$$

$$\leq \frac{1}{n} + P_r \{v^n \neq \hat{v}^n\} \log |v| + C$$

↑
تقریباً صاف فائز (۱۲)

$$\Rightarrow H(v) \leq \frac{1}{n} + P_\theta \{v^n \neq \hat{v}^n\} \log |V| + C$$

$$P_\theta \{v^n \neq \hat{v}^n\} \rightarrow 0$$

$\implies$

$$H(v) \leq C$$

$n \rightarrow \infty$

$\Leftarrow P_\theta \{v^n \neq \hat{v}^n\} \rightarrow 0$ لازم می آید که برای هر کد یک سوآم کانال در منبع، رابطه یابنده

$$H(v) \leq C$$

$\Leftarrow$ در ترانسمیسیونهای یک سوآم در یک کانال با خطای به میزان دلخواه کم ارسال کنیم، اگر آنها
آنتروپی منبع از ظرفیت کانال کمتر باشد.
برای این منظور تئوری داده را به صورت سوآم انجام دهیم یا به صورت در حیطه ای.

معنی می توان با تدرج به شرایط منع بر که بند منع بسته طراح کرد و سپس برای رسیدن به ظرفیت
یک که کانال خوب برای سدهای تولید شده در نظر گرفت.

در واقع مقصود از این طرح می باشد که برای احداث رصع که بند کانال ایجاد کرد این
مقصود نشرده سازی را اساس خاصیت AEP است و بیان می کند که برای هر منحنی می باشد
نوعی با تعداد کم با احتمال زیاد در حد که با یک آن می توان رصع ها منع را نشرده کرد.
مقصود که بند کانال را اساس $Joint AEP$ است و بیان می کند که اگر در ردی کانال
نوعی باشد (یا که بند کانال مناسب) با احتمال زیادی در ردی و فردی کانال توانا نوعی حسنه
با این می توان (با دیکه بند توانا نوعی) با خطای به میزان رگه های کم، رصع ها را ردی کانال
از آن لگ کرد (C) (R) . مقصود که بند توانا کانال بیان می کند که این در طراح برای توان برای رسیدن به طرح بسته

باجم ترکیب کرد.

تمرین سری پنجم

9, 5-1 (8)

در ادامه هدف بررسی حقیقت کانهایی پیوسته است یعنی کانهایی که در دارای خودی آنها،
شعبه‌های متناهی را می‌پوشاند. حس است. برای این منظور لازم است که مطالب ذکر شده در مورد
شعبه‌های متناهی نسخه را به حالت پیوسته تعمیم دهیم.

آنتروپی تناهی

آنتروپی تناهی در واقع آنتروپی یک شعبه متناهی پیوسته است. آنتروپی تناهی برای یک
شعبه متناهی پیوسته X با $h(X)$ نمایش داده می‌شود و بر اساس رابطه زیر بیان می‌شود،
$$h(X) = \int_{f(x) > 0} f(x) dx$$

که در آن $f(x)$ تابع چگالی احتمال متعریف در x

$$S = \{x \mid f(x) > 0\}$$

support set

ک: مجموعه پشتیبان

مثال - توزیع یکنواخت (یونیفرم) در بازه $[0, a]$

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(x) = -\int_0^a \frac{1}{a} \log\left(\frac{1}{a}\right) dx = \log a$$

- برای $a < 1$ ، داریم $h(x) < 0$ یعنی آنتروپی تنها عملی رخداد آنتروپی می‌تواند مقدار منفی نیز داشته باشد.

حجم محوریست $h(x)$ 2^{h(x)} تعریف می کنیم که همواره مثبت است.

$$\text{Vol}(S) = 2^{h(x)} > 0$$

$$x \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

مثال: توزیع نرمال

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = \varphi(x)$$

راحت تر این است که اکثر ریونی تا فعلی را بر حسب nat به دست آوریم پس با یک رابطه

$$h_b(x) = \log_b h_a(x)$$

آن را به بیت تبدیل کنیم.

$$h(x) \equiv h(\varphi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \lg \varphi(x) dx$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi\epsilon^2) - \frac{x^2}{2\epsilon^2} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(2\pi\epsilon^2) + \frac{1}{2\epsilon^2} \overbrace{E x^2}^{\epsilon^2} = \frac{1}{2} \ln e + \frac{1}{2} \ln(2\pi\epsilon^2)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(2\pi e \epsilon^2) = h(x) \equiv h(\varphi)$$

قضیه AEP: برای شریهای مستقل و iid پیوسته $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، تابع حاصل احتمال $f(x)$ داریم،

$$-\frac{1}{n} \log f(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(x) \equiv h(f)$$

$$\rightarrow \mathbb{E} \{-\log f(x)\} \equiv h(x) \equiv h(f)$$

اثبات: تکرین

باید به قضیه بالا از میان مجموعه‌های $A_\epsilon^{(n)}$ به صورت زیرترین کرد،

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^n \mid |-\frac{1}{n} \log f(x_1, \dots, x_n) - h(x)| \leq \epsilon\} = A_\epsilon^{(n)}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

حجم مجموعه A : به صورت زیر تعریف می شود

$$\text{Vol}(A) = \int \dots \int_A dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

که متناظر $|A|$ در حالت لسه است.

قضیه : مجموعه نزدیکی $A_\epsilon^{(n)}$ دارای خصوصیات زیر است ،
برای n به اندازه کافی بزرگ

$$1) \Pr \{ A_\epsilon^{(n)} \} > 1 - \epsilon$$

$$2) \text{Vol}(A) \leq 2^{n(h(x) + \epsilon)}$$

$$3) \text{Vol}(A) \geq (1 - \epsilon) 2^{n(h(x) - \epsilon)}$$

برای n به اندازه کافی بزرگ

(اثبات : تمرین)

فصل: محوره $A_\epsilon^{(n)}$ کرهه بن محوره از نظر حجم با افعال بزرگتر ایستادی ۱-۱ است یعنی

$$\frac{1}{n} \log \frac{\text{Vol}(A_\epsilon^{(n)})}{\text{Vol}(B_\delta^{(n)})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

تادی از ربه اول غای

یعنی محوره $A_\epsilon^{(n)}$ از نظر حجم با کرهه بن محوره ^{شامل} محصل ترین دسارها برابر است.
 حجم این محوره تقریباً برابر $2^{nh(x)}$ است. بنابراین ستران لنه که توسط طول کناری
 side length

این محوره برابر است با

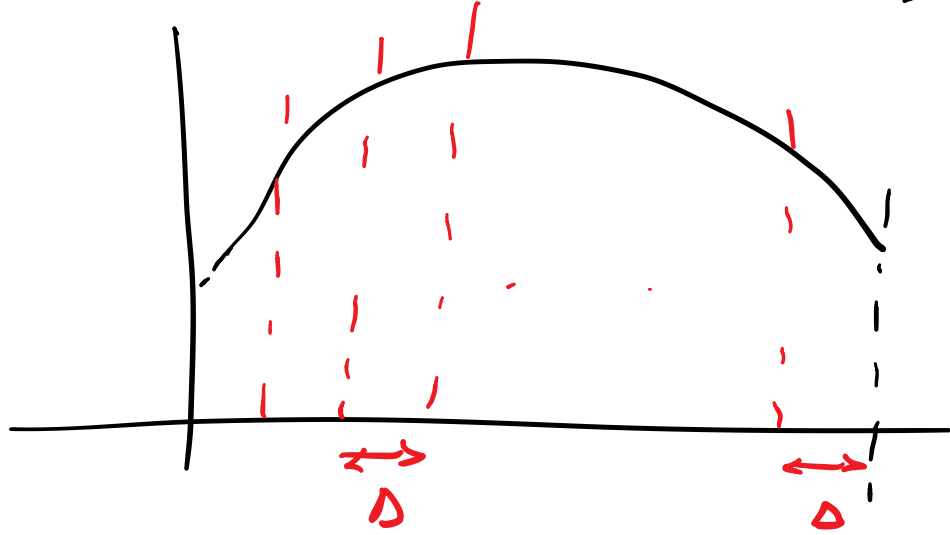
$$\sqrt[n]{\text{Vol}(B_\delta^{(n)})} \equiv \sqrt[n]{\text{Vol}(A_\epsilon^{(n)})} = (2^{nh(x)})^{\frac{1}{n}} = 2^{h(x)}$$

طول کناری =

$h(x)$ معادل کوارتم طول کناری مکعب بن محوره با ر ه بن حجم $(B_\delta^{(n)})$ است
 بنابراین $h(x)$ سترانه معیار از کسردن شعیر صادی به دست دد.

رابطہ بین آنٹروی توافقی و آنٹروی (لستہ)

متغیر تصادفی X یا تابع فعال احتمال $f(x)$ را در نظر می گیریم و آنرا به متغیر x را به فواصل مساوی Δ تقسیم می کنیم. فرض می کنیم که Δ در تمام این بازه ها پیوسته باشد.



بر اساس قضیه سدار میابین در هر بازه Δ می توان نوشت

$$\exists x_i ; f(x_i) \Delta = \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} f(x) dx$$

متغیر تصادفی X^Δ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$X^\Delta = x_i \quad \text{if} \quad i\Delta \leq X < (i+1)\Delta$$

(در واقع X^Δ متغیر تصادفی گرانیزه شده متغیر تصادفی X است)

$$P_r \{ X^\Delta = x_i \} = P_i = \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} f(x) dx = f(x_i) \Delta$$

$$\Rightarrow H(X^\Delta) = -\sum P_i \log P_i = -\sum (\Delta f(x_i)) \log (\Delta f(x_i))$$

$$= -\sum \Delta f(x_i) \log \Delta - \sum \Delta f(x_i) \log f(x_i)$$

$$= -\log \Delta \underbrace{\sum \Delta f(x_i)}_{P_i} - \sum \Delta f(x_i) \log f(x_i)$$

$$\Rightarrow H(X^\Delta) = -\log \Delta - \sum \Delta f(n_i) \log f(n_i)$$

$$\xrightarrow[\Rightarrow]{\Delta \rightarrow 0} H(X^\Delta) = -\log \Delta - \int f(n_i) \log f(n_i) dn_i$$

اگر $f(n_i)$ چگالی شریکان اشتغال میز باشد.

$$\xrightarrow[\Rightarrow]{\Delta \rightarrow 0} H(X^\Delta) = -\log \Delta + h(x)$$

$$\Rightarrow h(x) \xrightarrow[\text{مغیرقانونی}]{\Delta \rightarrow 0} H(X^\Delta) + \log \Delta$$

مغیرقانونی کو انیزه شده یاد می ده

مغیرقانونی

پای Δ کوچک داریم

= اگر نرخ احصای مشورتها رضایابانه 2^{-n} گرانتر از نسیم ، به حداد
برای بیان اصناج داریم .
 $D = 2^{-n}$
 $h(x) + n$

